2021 年度 機械工学専攻
大学院修士課程入学試験問題
機械工学（熱工学）問題１，問題２
解答時間 60 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題文を見ないこと．
2. 問題は問題１と問題２がある．全問に解答すること．
3. 問題ごとに解答用紙２枚および下書用紙１枚を使用すること．
4. 解答用紙および下書用紙の裏面の使用は禁止する．
5. すべての解答用紙および下書用紙の上方の指定された箇所に，受験番号を忘れずに記入すること．
6. 日本語または英語で解答すること．
7. 解答は解答用紙の実線の枠内に記入すること．
8. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
9. マウスなどによる問題文のスクロール，拡大および縮小はしてよい．キーボード操作は禁止する．

・ネットワークトラブルが生じた場合でも解答を続けること．

(白紙)

機械工学（熱工学）問題 1

図 1-1 に示すように，温度 T_0，圧力 p_0 が一定の気体中にバルブ付きの一定容積 V_1 のタンクが置かれている系について考える．初期状態ではバルブは閉じており，タンク内には温度 T_1，圧力 $p_1(<p_0)$ の周囲と同じ気体が充填されている．ここで，バルブを開いてタンク内に周囲の気体を取り込み，タンク内の圧力が周囲の気体の圧力 p_0 と等しくなったところでバルブを閉じる場合について考える．気体は，比熱比 κ，気体定数 R が一定の理想気体とする．タンクやバルブの壁面は断熱されている．また，バルブ内の流れは音速以下であり，それ以外の場所の流れは無視する．さらに，タンク内に流入した気体は，直ちにタンク内の気体と混合するため，タンク内の温度，圧力は，常に一様であるとする．以下の設問に答えよ．

まず，気体がバルブを通過する際に<u>等エンタルピー変化</u>をする場合について考える．

(1)バルブが開いている間に，この系のエントロピー増加をもたらした不可逆過程を二つ挙げよ．

(2)タンク内に流入した気体の質量とバルブを閉じた後のタンク内の気体の温度を求めよ．また，導出過程も示せ．

(3)バルブが開いている間に系で発生した熱量を求めよ．また，導出過程も示せ．

次に，気体がバルブを通過する際に<u>等エントロピー変化</u>をする場合について考える．

(4)タンク内に流入した気体の質量とバルブを閉じた後のタンク内の気体の温度を導出せよ．また，導出過程も示せ．

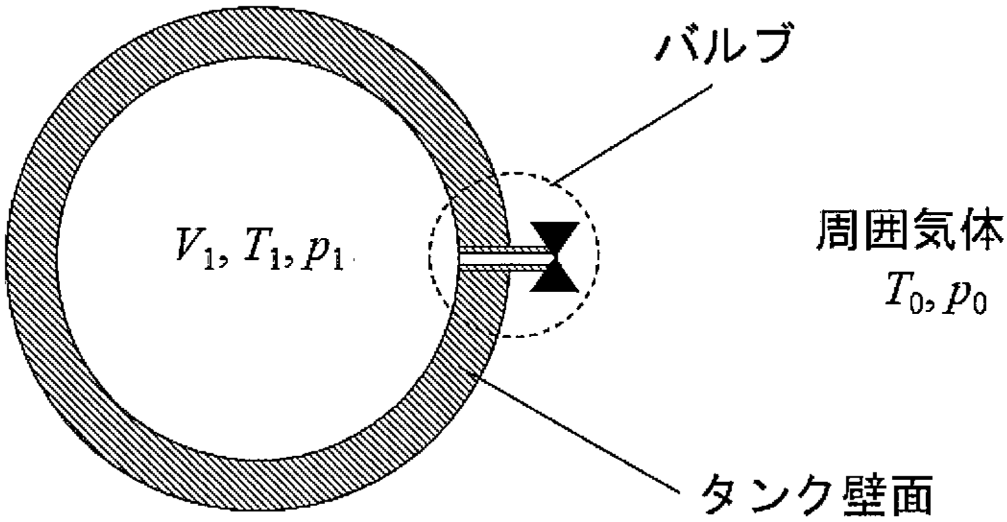


図 1-1

機械工学（熱工学）問題 2

図 2-1 に示すとおり，x 方向の一次元定常熱伝導を気体分子運動論に基づいて考える．この系において x 方向の温度勾配は一定であり，系内の流れは無視する．温度 T_{H} の高温熱浴($x \le x_{\mathrm{H}}$)と温度 T_{C} の低温熱浴($x \ge x_{\mathrm{C}}$)の間に，質量 m の単原子分子が一様の数密度 n で満たされており，分子同士が衝突することで熱が高温から低温に輸送されている．ここで，気体の内部エネルギーは分子の並進運動エネルギーのみであり，温度 T における分子の x，y，z 方向の速度成分 u，v，w は以下に示すマクスウェルの速度分布関数 $f(u,v,w)$ に従っているものとする．

$$f(u,v,w) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2kT}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right\}$$

ただし，k はボルツマン定数である．したがって，分子の平均速さ $\bar{c}$ は以下で与えられる．

$$\bar{c} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{u^2+v^2+w^2}\, f(u,v,w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

以下の設問に答えよ．導出過程も示せ．必要であれば，以下の式を用いてもよい．

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,\quad \int_0^{\infty} x\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2b}\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2b-1)}{2^b}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2b+1}}}\ ,\quad \int_0^{\infty} x^{2b+1}\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}x = \frac{b!}{2a^{b+1}}$$

ここで，a は正の実数であり，b は正の整数である．

(1) 分子の平均速さ $\bar{c}$ を k，T，m を用いて表せ．

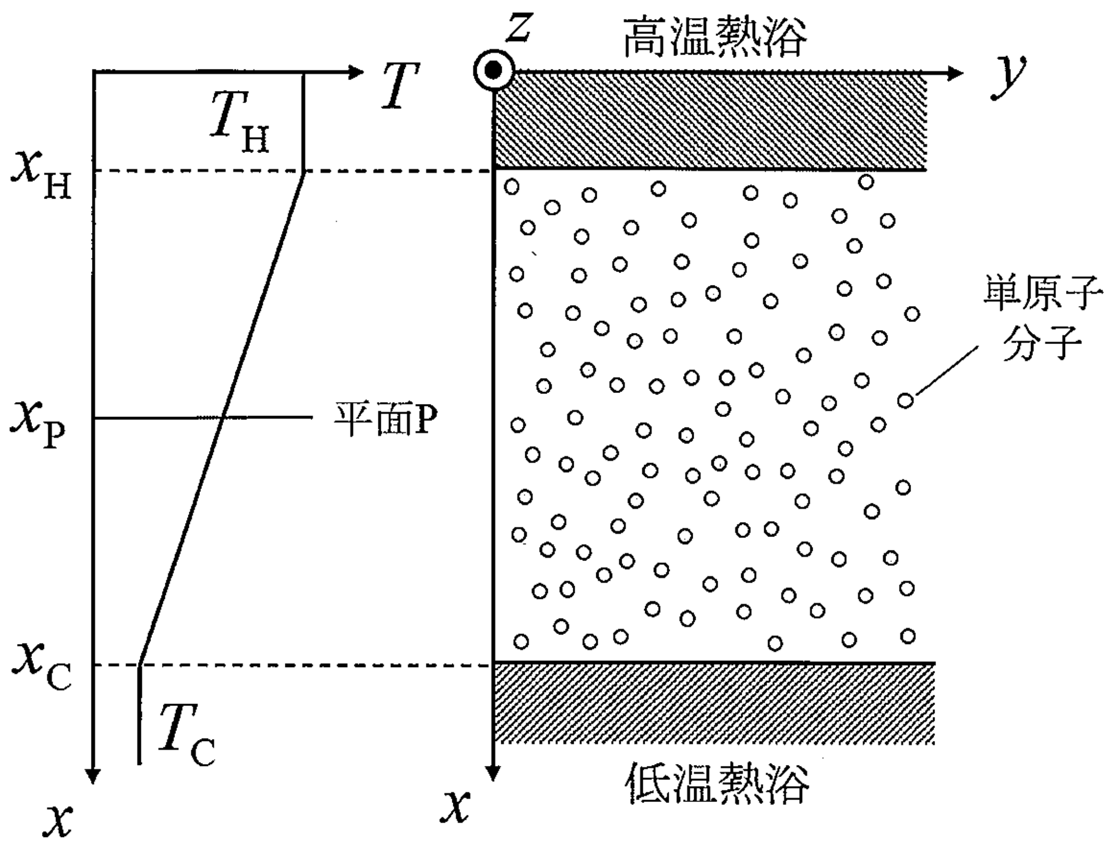
次に，図 2-2 に示すように，ある時刻 t_0 から $t_0+\Delta t$ の間に位置 $x = x_{\mathrm{P}}$ における平面 P を通過する分子を考える．ここで，Δt は微小な時間とし，Δt 内に分子の速度の x 方向成分 u にはよらず，時刻 t_0 に存在していた位置から他の分子と衝突しないで平面 P を通過するものと仮定する．この場合，平面 P と位置 $x = x_{\mathrm{P}} - u\Delta t$ における平面 P' の間に存在する分子が Δt の時間内に平面 P を通過する．ただし，平面 P と平面 P' の間に存在する分子の速度分布関数は，平面 P に存在する分子のそれと変わらないものとみなせるものとする．

(2) 平面 P を単位面積，単位時間あたりに x 軸正方向に通過する分子の数を求めよ．

(3) 平面Pを単位面積，単位時間あたりにx軸正方向に通過する分子が運ぶ熱量を求めよ．

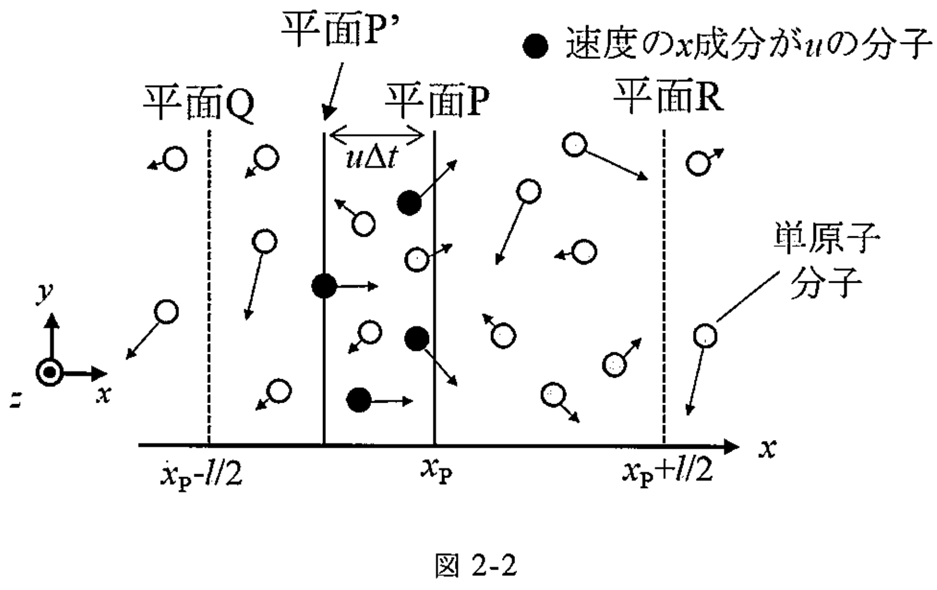
最後に，平均自由行程で決まる十分小さい長さlをとると，位置$x = x_{\mathrm{p}} - l/2$における平面Qを単位面積，単位時間あたりにx軸正方向に通過するすべての分子が運ぶ熱量と，位置$x = x_{\mathrm{p}} + l/2$における平面Rを単位面積，単位時間あたりにx軸負方向に通過するすべての分子が運ぶ熱量の差が平面Pにおける正味の熱流束であるものとする．さらに，各平面Q，Rを通過する分子の速度分布関数は，それぞれの平面における速度分布関数であらわせるものとする．

(4) 熱伝導率λをn，k，$\bar{c}$，lを用いて表せ．



z
高温熱浴
y
T
T_H
x_H
単原子
分子
x_P
平面P
x_C
T_C
x
低温熱浴
x

図 2-1



平面P'
● 速度のx成分がuの分子
平面Q
平面P
平面R
$u\Delta t$
単原子
分子
y
z
x
x_P-l/2
x_P
x_P+l/2
x

図 2-2

2021年度 機械工学専攻
大学院修士課程入学試験問題
機械工学（流体力学）問題３，問題４
解答時間 60 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題文を見ないこと．
2. 問題は問題３と問題４がある．全問に解答すること．
3. 問題ごとに解答用紙２枚および下書用紙１枚を使用すること．
4. 解答用紙および下書用紙の裏面の使用は禁止する．
5. すべての解答用紙および下書用紙の上方の指定された箇所に，受験番号を忘れずに記入すること．
6. 日本語または英語で解答すること．
7. 解答は解答用紙の実線の枠内に記入すること．
8. 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
9. マウスなどによる問題文のスクロール，拡大および縮小はしてよい．キーボード操作は禁止する．

・ネットワークトラブルが生じた場合でも解答を続けること．

（白紙）

機械工学（流体力学）問題３

以下の文章の空欄を埋めよ．なお，空欄 1, 2, 14, 15, 16 には適切な用語を記入し，それ以外の空欄には適切な数字，または数式を記入せよ．

$x-y$ 平面における 2 次元流れを考える．流体はニュートン流体とし，非圧縮とする．このとき，流れ場の支配方程式は(　1　)，および(　2　)とよばれており，それぞれ質量保存則と運動量保存則を表す．

以下では，x 方向速度を U，y 方向速度を V とする．また，流体の密度を ρ，粘性係数を μ とする．時刻 $t=t_0$ において，$U(x,y,t_0)=A_0\sin(kx)\cos(ky)$ であると仮定する．ここで，正の実定数 A_0 と k は，それぞれ振幅と波数を表す．任意の x において，V の y 方向の平均値はゼロとすると，時刻 $t=t_0$ における V の空間分布は，(　1　) より $V(x,y,t_0)=$ (　3　) となる．この流れ場は，$x-y$ 平面に垂直な z 方向の渦度成分を持っており，その値は $\omega_z(x,y,t_0)=$ (　4　) となる．この流れ場の流れ関数は，$\psi(x,y,t_0)=$ (　5　) で与えられる．ただし，$\psi(0,0,t_0)=0$ とする．(　2　) の両辺の発散をとり，(　1　) を用いてゼロとなる項を全て消去すると，圧力の空間分布 $P(x,y,t)$ を決める偏微分方程式が (　6　) と書ける．この式は，圧力ポアソン方程式とよばれる．

$x-y$ 平面内に $(x,y)=(0,\pi/(2k))$, $(0,0)$, $(\pi/k,0)$, $(\pi/k,\pi/(2k))$ の 4 点をとり，それぞれ A，B，C，D とする．これらの点で囲まれる長方形の領域を検査体積 ABCD とし，この領域内部における x 方向の運動量の保存を考える．なお，以下の空欄 7, 8, 9, 10, 11 では，z 方向の単位長さあたりの量を答えよ．時刻 $t=t_0$ において，検査体積 ABCD 内部における x 方向運動量の積分量は(　7　) である．B と C を結んだ境界 BC から，対流により単位時間あたり検査体積 ABCD に流入する x 方向の運動量はゼロである．境界 BC において，検査体積 ABCD に働く x 方向の表面力は(　8　) である．境界 DA から，対流により単位時間あたり検査体積 ABCD に流入する x 方向の運動量はゼロである．境界 DA において，検査体積 ABCD に働く x 方向の表面力は (　9　) である．境界 AB と境界 CD において，対流により単位時間あたり検査体積 ABCD に流入する x 方向の運動量の流入はゼロである．境界 AB と境界 CD において検査体積 ABCD に働く x 方向の表面力に関して，流れ場の対称性により圧力による力は打ち消しあう．したがって，圧力の寄与を考えないと，境界 AB と境界 CD において検査体積 ABCD に働く x 方向の表面力は等しく，その値は (　10　) となる．以上の結果より，検査体積 ABCD における x 方向の運動量の単位時間あたりの減少量は (　11　)となる．

次に，上述の流れ場の時間発展を考える．任意の時刻 t において U が，$U(x,y,t)=A(t)\sin(kx)\cos(ky)$ で表現できると仮定する．ただし，$A(t_0)=A_0$ である．検査体積 ABCD における運動量の保存を考慮すると，$A(t)$ に関する常微分方程式が，A，ρ，μ，k を用いて，$\mathrm{d}A/\mathrm{d}t=$ (　12　) と書ける．時刻 $t=t_0$ における初期条件を考慮し，この常微分方程式を時間積分すると A の時間発展が $A(t)=$ (　13　) と求められる．これより，流体の持つ運動エネルギーが時間と共に減少することが分かる．これは，流体の (　14　) によって運動エネルギーが (　15　) に変換されるためである．時刻 $t=t_0$ において，複数の粒子を $x-y$ 平面内に配置することを考える．ここで，粒子は局所の流体速度に完全に追従するものとする．各粒子は，時刻 $t=t_0$ における(　16　) の値が一定となる曲線上を運動する．$|x|<\pi/k$ かつ $|y|<\pi/k$ を満たす領域において，粒子が静止する位置は (　17　) 点存在する．

機械工学（流体力学）問題4

密度ρ，粘性係数μの非圧縮性流体の軸対称「ランキン渦」を考える．ランキン渦は旋回速度$v_\theta(r)$のみを持ち，渦の軸方向に一様な分布をしているものとする．ここで，rは渦の中心からの距離（以降，半径と称する）であり，図 4-1 に示すように，$v_\theta(r)$は以下のように表されるものとする．

$$\frac{v_\theta(r)}{r} = \frac{v_0}{r_0} \quad \text{for} \quad 0 \le r \le r_0 \tag{1}$$

$$r v_\theta(r) = r_0 v_0 \quad \text{for} \quad r_0 \le r \tag{2}$$

$0 \le r \le r_0$の領域は「粘性コア」とよばれる領域であり，一方，$r_0 \le r$は「自由渦」とよばれる領域である．自由渦の領域の循環を$\Gamma_0 \equiv 2\pi r_0 v_0$とし，また，半径$r$における圧力を$p(r)$とし，無限遠（$r = r_\infty$）における圧力を$p_\infty$とする．ここで，$r_0$と$v_0$は一定であり，流れは定常であるものとする．以下の設問(1)から(3)に答えよ．なお，それぞれの解答に対して，その導出過程も示すこと．

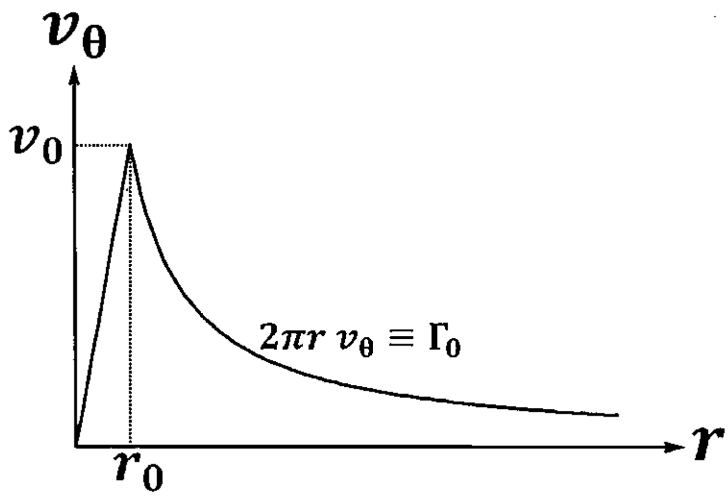


図 4-1

(1) $v_\theta(r)$をr，r_0およびΓ_0を用いて表せ．また，$p(r)$をrの関数として表せ．

(2) 軸方向の単位長さあたりの粘性コア領域の運動エネルギーを求めよ．

(3) 粘性コア領域と自由渦領域の境界$r = r_0$を考える．この境界において，せん断応力により，単位時間あたりに，軸方向の単位長さあたりの粘性コア領域にされる仕事，および同自由渦領域にされる仕事を計算せよ．さらに，単位時間，軸方向の単位長さあたりの散逸量を求めよ．ただし，$r = r_0$における散逸量は無視できるものとする．

次に，時間的に減衰する非圧縮性流体の軸対称「ランキン渦」を考える．図 4-2 に示すように，「粘性コア半径」r_0における循環$\Gamma_0 \equiv 2\pi r_0 v_0$は一定のまま，粘性コア半径$r_0$は増大し，一方，粘性コア半径における旋回速度$v_0$は減少するものとする．粘性コア領域および自由渦領域における旋回速度v_θはそれぞれ前述の式(1)および式(2)で表されるものとする．微小な時間$\mathrm{d}t$における粘性コア半径の増加量を$\mathrm{d}r_0$とするとき，$\mathrm{d}t$の間における，軸方向の単位長さあたり自由渦領域の運動エネルギーの減少量は以下の式で表される．

$$\frac{\rho \Gamma_0{}^2}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}r_0}{r_0}$$

(4) $r_0(t)$をtの関数で表せ．

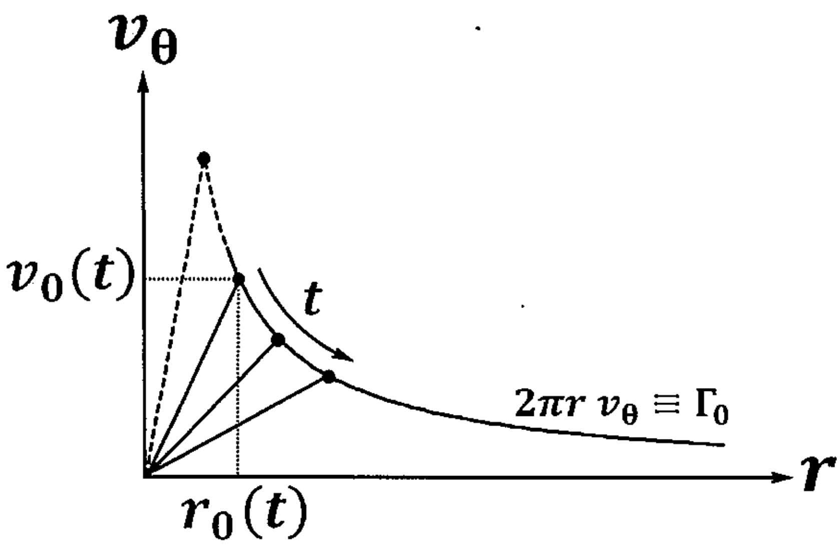


図 4-2

2021 Department of Mechanical Engineering
Master Course Program Entrance Examination
Mechanical Engineering (Thermal Engineering)
Problem 1 and Problem 2
Answer Time 60 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not look at the Problems until the start of the examination has been announced.
2. Answer all Questions in Problems 1 and 2.
3. Use 2 Answer Sheets and 1 Draft Sheet for each Problem.
4. Do not use the back faces of the Answer Sheets or the Draft Sheets.
5. Fill in your examinee number in the designated places at the top of all the Answer Sheets and the Draft Sheets.
6. Answers must be written in Japanese or English.
7. Answers must be written within the solid frame on the Answer Sheets.
8. Any Answer Sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
9. Scrolling, expansion and reduction of the Problems are permitted by use of a mouse or other pointing device only. Keyboard operation is prohibited.

• Continue the answer even if network trouble occurs.

(Blank)

Mechanical Engineering (Thermal Engineering) Problem 1

Consider the system as shown in Figure 1-1 where a valved tank of a constant volume of V_1 is placed in the ambient gas with a constant temperature, T_0, and a constant pressure, p_0. In the initial state, the valve is closed, and the tank is filled with the gas that is identical to the ambient gas with a temperature, T_1, and a pressure, $p_1 (< p_0)$. Here, consider the case where the valve will be opened to let the ambient gas flow into the tank, and will be closed when the pressure in the tank becomes equal to the ambient pressure p_0. Assume that the gas is an ideal gas with a constant specific-heat ratio, κ, and a constant gas constant, R. The wall of the tank and that of the valve are thermally insulated. The flow in the valve is subsonic, and is neglected elsewhere. The temperature and the pressure in the tank are kept homogenous because the gas that flows into the tank is immediately mixed with the gas in the tank. Answer the following questions.

First, consider the case where the gas flow in the valve is <u>isenthalpic</u>.

(1) Find two irreversible processes that have increased the entropy of this system when the valve is open.

(2) Obtain the mass of the gas that has flowed into the tank and the temperature in the tank after the valve is closed. Show the derivation process.

(3) Obtain the amount of heat generated in the system during the period when the valve is open. Show the derivation process.

Next, consider the case where the gas flow in the valve is <u>isentropic</u>.

(4) Obtain the mass of the gas that has flowed into the tank and the temperature in the tank after the valve is closed, respectively. Show the derivation process.

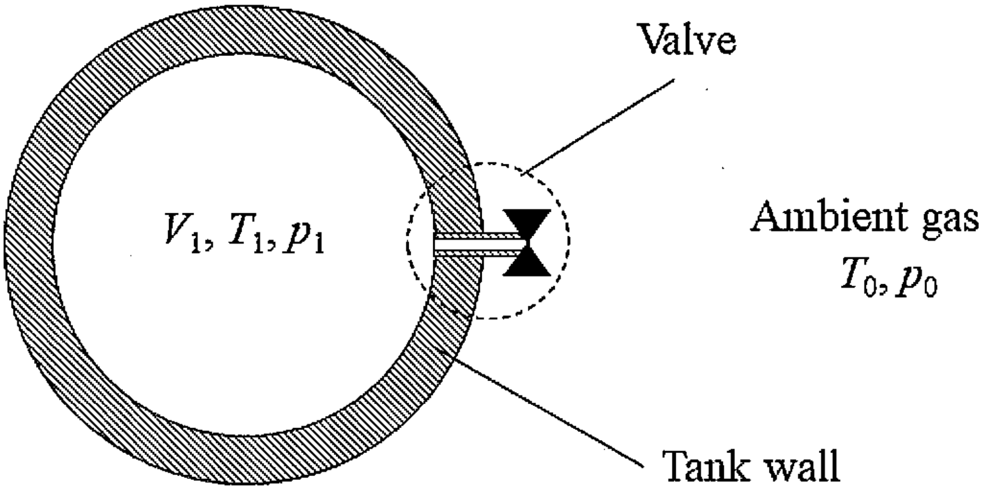


Figure 1-1

Mechanical Engineering (Thermal Engineering) Problem 2

As shown in Figure 2-1, consider the one-dimensional steady heat conduction in the x direction based on the kinetic gas theory. In this system, the temperature gradient along the x direction is constant, and fluid flow in the system is neglected. The space between the hot thermostat at a temperature T_{H} ($x \leq x_{\mathrm{H}}$) and the cold thermostat at a temperature T_{C} ($x \geq x_{\mathrm{C}}$) is filled with monoatomic molecules of mass m at a constant number density n, and heat is transferred from the hot thermostat to the cold thermostat by the collisions between molecules. Here, assume that the internal energy of the gas is only translational kinetic energy of the molecules, and the velocity components of the molecules at temperature T, u, v, w in the x, y, and z directions follow the Maxwell's velocity distribution function $f(u,v,w)$

$$f(u,v,w) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2kT}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right\},$$

where k is the Boltzmann constant. Therefore, the averaged molecular speed $\bar{c}$ is given by

$$\bar{c} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{u^2+v^2+w^2}\, f(u,v,w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Answer the following questions. Show the derivation process. Use the following equations, if necessary.

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_0^{\infty}x\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2b}\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2b-1)}{2^b}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2b+1}}}, \quad \int_0^{\infty}x^{2b+1}\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}x = \frac{b!}{2a^{b+1}}$$

where a is a positive real number, and b is a positive integer.

(1) Obtain the expression of the averaged molecular speed $\bar{c}$ by using k, T, and m.

Next, as shown in Figure 2-2, consider molecules traveling across the plane P located at the position $x = x_{\mathrm{P}}$ between the time t_0 and the time $t_0 + \Delta t$. Here Δt is a short time interval. Assume that molecules with a velocity component in the x direction, u, pass through the plane P without collisions with other molecules during Δt from the position where they were located at the time t_0. In this case, molecules that were between the plane P and the plane P' located at the position $x = x_{\rm P} - u\Delta t$ pass through the plane P during the time Δt. Here, it is assumed that the velocity distribution function of a molecule between the plane P and the plane P' is equal to that of a molecule at the plane P.

(2) Obtain the number of the molecules traveling across the plane P in the positive direction of the x axis per unit area and unit time.

(3) Obtain the amount of heat carried by the molecules traveling across the plane P in the positive direction of the x axis per unit area and time.

Finally, consider a small length l related to the mean-free path of the gas. Assume that the net heat flux at the plane P is defined by the difference between the amount of heat carried by the molecules traveling across the plane Q located at the position $x = x_{\rm P} - l/2$ per unit area and unit time in the positive x direction and the amount of heat carried by the molecules traveling across the plane R located at the position $x = x_{\rm P} + l/2$ per unit area and unit time in the negative x direction. In addition, assume that the velocity distribution functions of the molecules traveling across the planes Q and R are represented by the velocity distribution functions at the corresponding planes.

(4) Obtain the expression of the thermal conductivity λ by using n, k, $\bar{c}$, and l.

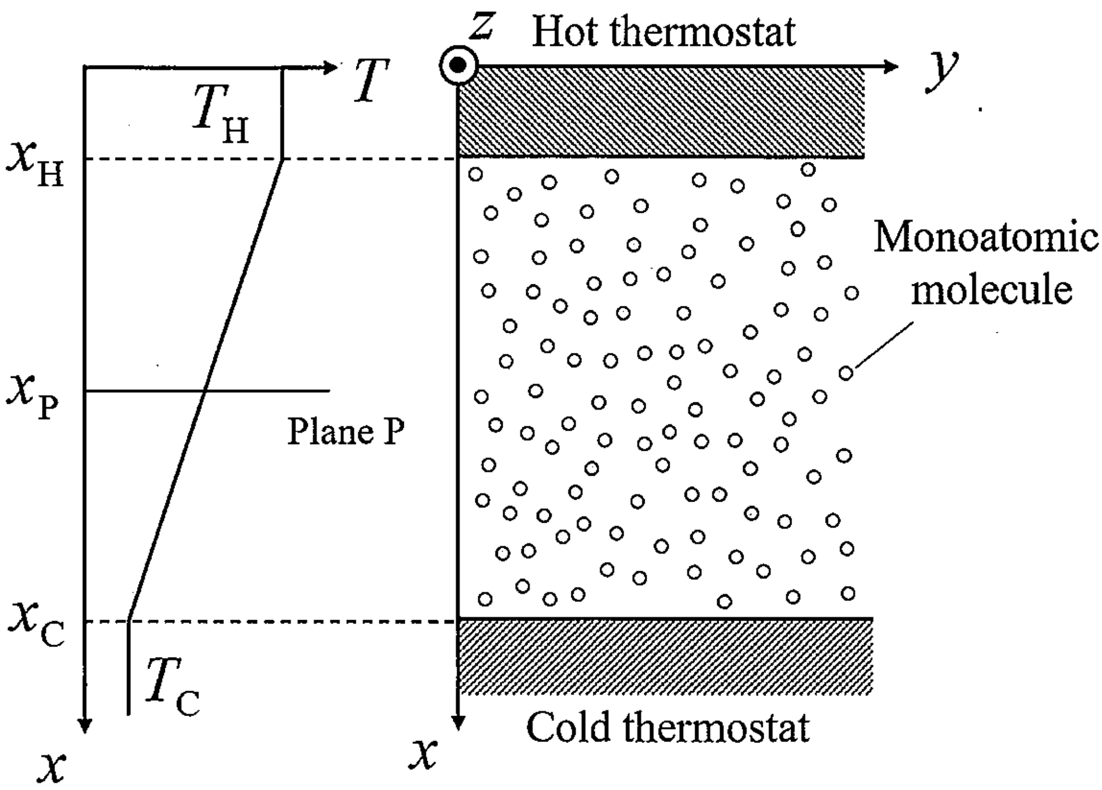


Figure 2-1

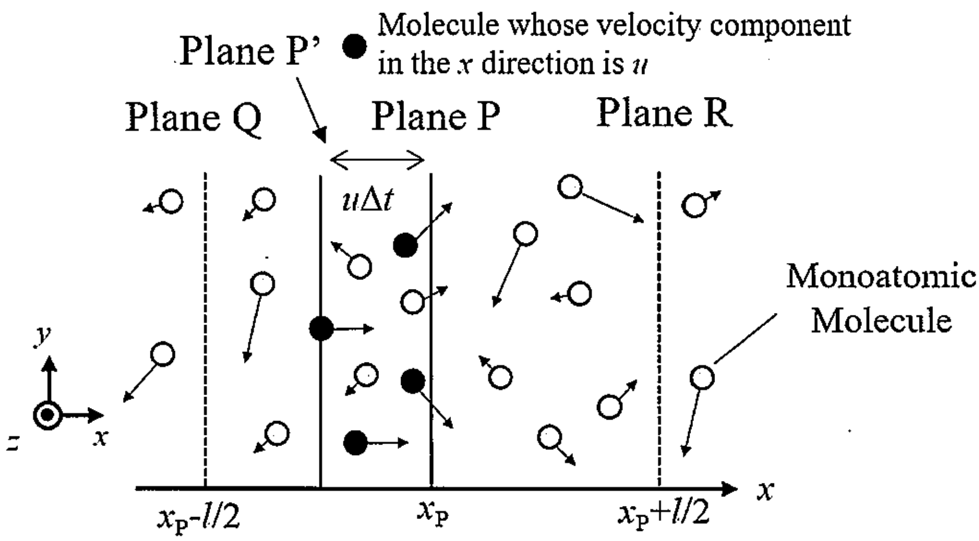


Figure 2-2

2021 Department of Mechanical Engineering

Master Course Program Entrance Examination

Mechanical Engineering (Fluid Dynamics)

Problem 3 and Problem 4

Answer Time 60 minutes

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not look at the Problems until the start of the examination has been announced.
2. Answer all Questions in Problems 3 and 4.
3. Use 2 Answer Sheets and 1 Draft Sheet for each Problem.
4. Do not use the back faces of the Answer Sheets or the Draft Sheets.
5. Fill in your examinee number in the designated places at the top of all the Answer Sheets and the Draft Sheets.
6. Answers must be written in Japanese or English.
7. Answers must be written within the solid frame on the Answer Sheets.
8. Any Answer Sheet with marks or symbols irrelevant to your answers is considered to be invalid.
9. Scrolling, expansion and reduction of the Problems are permitted by use of a mouse or other pointing device only. Keyboard operation is prohibited.

• Continue the answer even if network trouble occurs.

(Blank)

Mechanical Engineering (Fluid Dynamics) Problem 3

Fill the blanks in the following text with appropriate words for blanks 1, 2, 14, 15 and 16, and fill the other blanks with an appropriate number or mathematical formula.

Consider a two-dimensional flow in a $x-y$ plane. The fluid is assumed to be a Newtonian and incompressible fluid. The governing equations for this flow are called (1) and (2), which represent mass and momentum conservation, respectively.

Hereafter, the velocity components in the x and y directions are denoted by U and V, respectively. The fluid density is denoted by ρ and the coefficient of viscosity is denoted by μ. At the time $t=t_0$, assume $U(x,y,t_0)=A_0\sin(kx)\cos(ky)$. Here, positive real constants A_0 and k represent the amplitude and the wavenumber, respectively. When the average of V in the y direction is zero for an arbitrary x, the spatial distribution of V at $t=t_0$ can be obtained as $V(x,y,t_0)=$ (3) by using (1). This flow field has a vorticity component in the z direction perpendicular to the $x-y$ plane, and its value is $\omega_z(x,y,t_0)=$ (4). The stream function of this flow field is given by $\psi(x,y,t_0)=$ (5), when $\psi(0,0,t_0)=0$. By taking the divergence of both the sides of (2) and removing all the terms that become zero due to (1), a partial differential equation that determines the spatial distribution of the pressure, $P(x,y,t)$, can be obtained as (6). This equation is called the pressure Poisson equation.

Consider the following four points, $(x,y)=(0,\pi/(2k))$, $(0,0)$, $(\pi/k,0)$, $(\pi/k,\pi/(2k))$, in the $x-y$ plane and denote them as A, B, C and D, respectively. Taking the control volume ABCD, which is the rectangle defined by the four points, consider the momentum conservation in the x direction within the control volume ABCD. For the following blanks 7, 8, 9, 10 and 11, give the quantities per unit length in the z direction. At $t=t_0$, the integral of the momentum in the x direction within the control volume ABCD is (7). The amount of the momentum in the x direction flowing into the control volume ABCD by convection across the boundary BC connecting the points B and C per unit time is zero. The surface force in the x direction acting on the control volume ABCD at the boundary BC is (8). The amount of the momentum in the x direction flowing into the control volume ABCD by convection across the boundary DA per unit time is zero. The surface force in the x direction acting on the control volume ABCD at the boundary DA is (9). At the boundaries AB and CD, the amount of the momentum in the x direction flowing into the control volume ABCD per unit time is zero. As for the surface forces in the x direction acting on the control volume ABCD at the boundaries AB and CD, the forces due to the pressure are cancelled out due to the symmetry of the flow field. Therefore, without taking into consideration the contribution from the pressure, the surface forces in the x direction acting on the control volume ABCD at the boundaries AB and CD are equal, and their value is (10). From the above results, the decrease of the momentum in the x direction in the control volume ABCD per unite time is (11).

Next, consider the time evolution of the above flow field. Assume that U at an arbitrary time t can be expressed by $U(x,y,t)=A(t)\sin(kx)\cos(ky)$, where $A(t_0)=A_0$. Based on the momentum conservation in the control volume ABCD, the ordinary differential equation for $A(t)$ is described as $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t=$ (12) by using A, ρ, μ, k. Taking into account the initial condition at $t=t_0$ and integrating the ordinary differential equation in time, the time evolution of A is obtained as $A(t)=$ (13). From this result, it is found that the kinetic energy of the fluid decreases with time. This can be explained by the fact that (14) of the fluid converts the kinetic energy into (15). Place particles in the $x-y$ plane at $t=t_0$, and assume that they completely follow the local fluid velocity. Each particle moves along a curve with an identical value of (16) at $t=t_0$. Within the region of $|x|<\pi/k$ and $|y|<\pi/k$, the number of locations where a particle stays at rest is (17).

Mechanical Engineering (Fluid Dynamics) Problem 4

Consider an axisymmetric "Rankine vortex" of an incompressible fluid with a density ρ and a coefficient of viscosity μ. Assume that the Rankine vortex has only tangential-velocity component, $v_\theta(r)$ and its distribution is uniform in the direction of the axis of the vortex. r is the distance from the center of the vortex (hereafter, referred to as radius), and $v_\theta(r)$ can be represented by,

$$\frac{v_\theta(r)}{r} = \frac{v_0}{r_0} \quad \text{for} \quad 0 \leq r \leq r_0 \tag{1}$$

and,

$$r v_\theta(r) = r_0 v_0 \text{ for} \quad r_0 \leq r \tag{2}$$

as shown in Figure 4-1. The region where $0 \leq r \leq r_0$ is called the "viscous-core" region while that where $r_0 \leq r$ the "free-vortex" region. Let $\Gamma_0 \equiv 2\pi r_0 v_0$ be the circulation in the free-vortex region, $p(r)$ be the pressure at radius r, and p_∞ be the pressure at the infinite distance ($r = r_\infty$). Assume that both r_0 and v_0 are kept constant, and the flow is kept steady. Answer Question (1) through Question (3). Show the derivation to each of the answers.

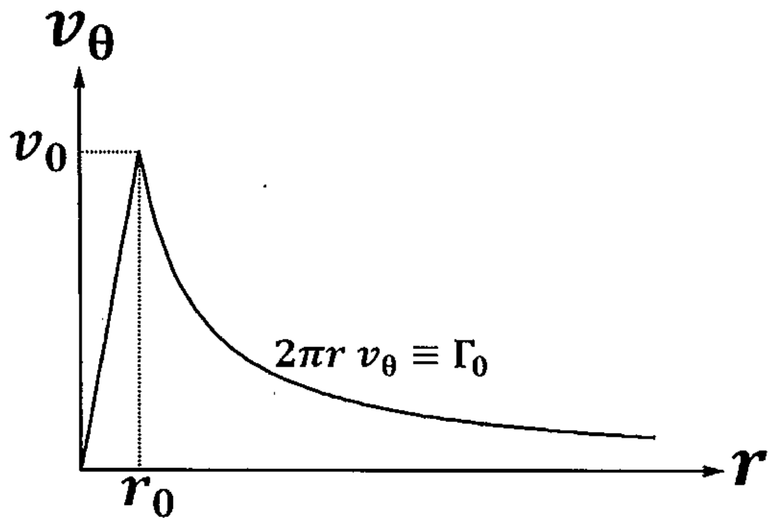


Figure 4-1

(1) Represent $v_\theta(r)$ by using r, r_0 and Γ_0, and find $p(r)$ as a function of r.

(2) Find the kinetic energy in the viscous-core region per unit axial length.

(3) Consider the interface between the viscous-core region and the free-vortex region at $r = r_0$. Obtain the work done by the shear stress at this interface per unit time, to the viscous-core region and to the free-vortex region, per unit axial length, respectively. Find the rate of dissipation per unit axial length, by assuming that the dissipation at $r = r_0$ can be neglected.

Next, consider an axisymmetric "Rankine vortex" of an incompressible fluid decaying with time. Assume that the "viscous-core radius", r_0 will increase while the tangential velocity at the viscous-core radius, v_0 will decrease with the circulation $\Gamma_0 \equiv 2\pi r_0 v_0$ at the viscous-core radius kept constant, as shown in Figure 4-2. The tangential-velocity v_θ in the viscous-core region and that in the free-vortex region are both represented by the above-described equations (1) and (2). Let $\mathrm{d}r_0$ be the small increase in the viscous-core radius during a small time $\mathrm{d}t$, then the decrease in the kinetic energy in the free-vortex region per unit axial length during $\mathrm{d}t$ can be represented by,

$$\frac{\rho \Gamma_0^{\,2}}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}r_0}{r_0}$$

(4) Find $r_0(t)$ as a function of t.

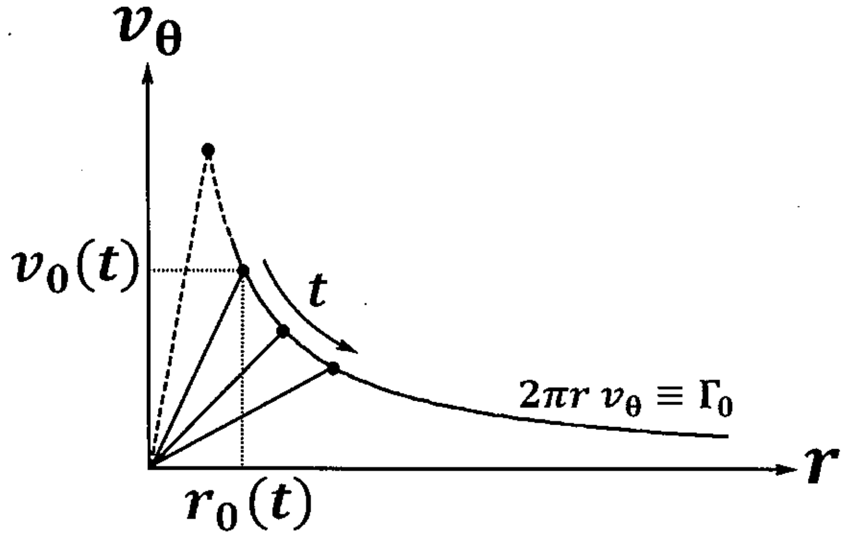


Figure 4-2