

平成28年度機械工学専攻  
大学院修士課程入学試験問題

「機械工学」(第1部)

試験日時：平成27年9月1日(火) 9:00~11:00

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
2. 問題は問題1から問題2までである。全問に解答すること。
3. 問題の落丁、乱丁、あるいは印刷不鮮明な箇所があれば申し出ること。
4. 答案用紙は4枚配付される。枚数を確認し、過不足があれば申し出ること。
5. 問題ごとに2枚の答案用紙を用いて解答すること。設問Ⅰ、Ⅱに分かれている問題は、設問ごとに1枚の答案用紙を用いて解答すること。解答を表面で書ききれない時は、裏面にわたってもよい。なお、それでも解答するスペースが不足する場合は答案用紙を与えるので申し出ること。
6. 答案用紙の指定された箇所に、自分の受験番号、その答案用紙で解答する問題番号を記入すること。記入もれの場合は採点されないことがある。なお、科目名欄には「機械工学(第1部)」と記入すること。答案用紙の右端にある「 / of 」については、答案用紙を追加しない場合は空欄のままよい。但し答案用紙を追加した場合は、問題ごとの枚数を記載する。
7. 解答に関係のない記号や符号を記入した答案は無効となることがある。
8. 答案用紙は、解答ができなかった分も含め、全てを提出すること。
9. 下書き用紙は2枚配付される。左上に自分の受験番号を記入すること。
10. 下書き用紙は、使用しなかった分も含め、2枚全部を提出すること。
11. 問題冊子は持ち帰ってよい。

# FY2016 Department of Mechanical Engineering

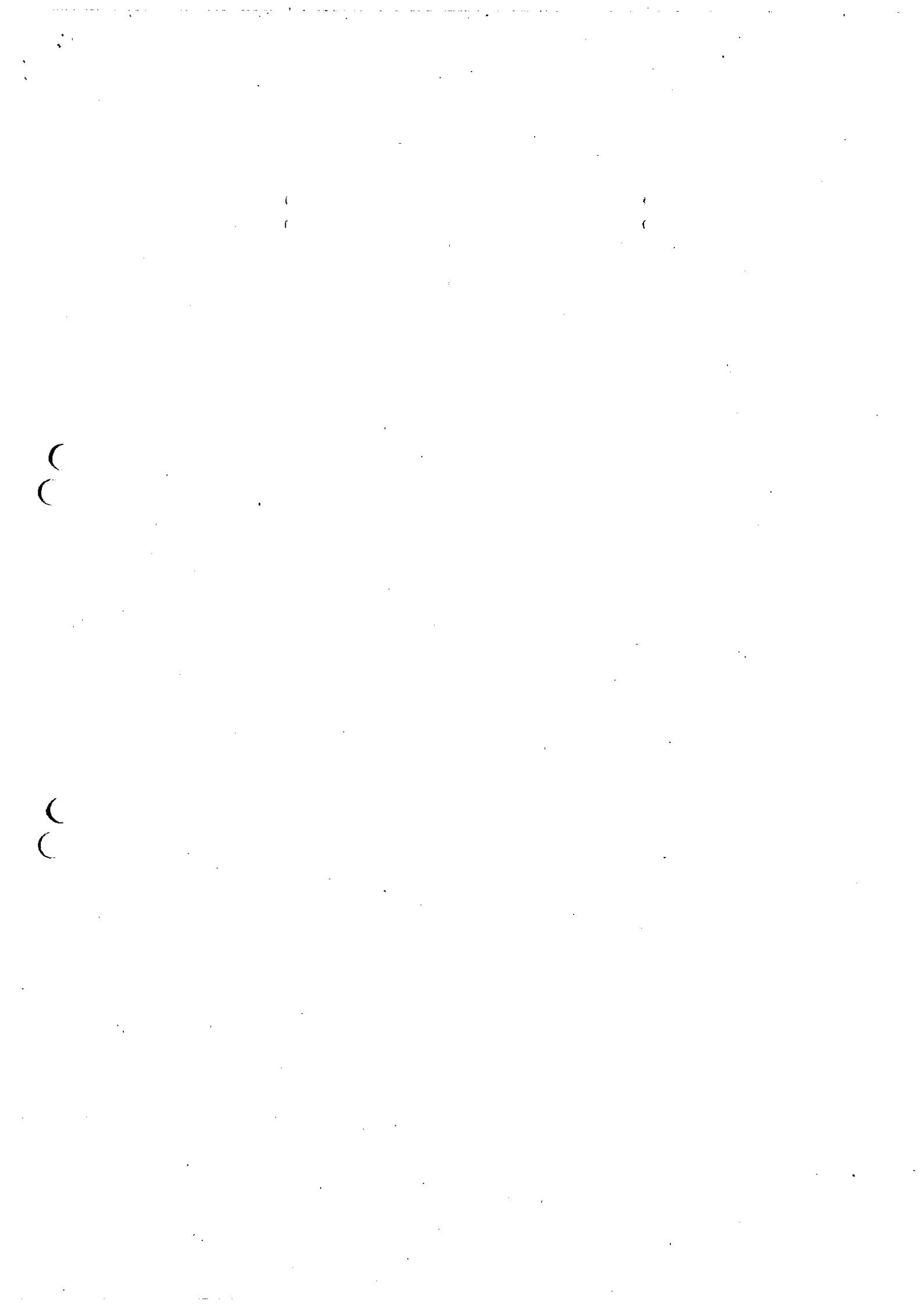
## Master Course Program Entrance Examination

### “Mechanical Engineering” (Part 1)

2015/9/1 (Tuesday) 9:00~11:00

#### Instructions

1. Do not open the exam booklet until you are instructed to begin.
2. Answer all Questions in Problems 1 and 2.
3. If you find some incomplete printing or collating, report them to the proctor.
4. Make sure that you have all 4 answer sheets. Let the proctor know otherwise.
5. Use 2 answer sheets for each Problem. If there are Questions I and II in a Problem, use one answer sheet for one Question. If the space on the front side of the answer sheet is not enough, you may also use the backside. If the space is still not enough, ask the proctor for an additional answer sheet.
6. On each answer sheet, write your candidate number and the Problem number in the designated boxes. If you fail to do so, the answer sheet may not be graded. Write “Mechanical Engineering (Part 1)” in “Subject”. Leave “( / of)” blank unless you use an additional answer sheet for the Problem.
7. Answer sheets with symbols and signs that are not related the answers may be judged invalid.
8. Hand in all the answer sheets even if you have not used them.
9. You are provided with 2 worksheets. Write your registration number on the upper left corner of each worksheet.
10. Hand in both worksheets even if you have not used them.
11. You may take home the exam booklet.



## 問題 1

下記の I, II の両方について解答せよ. なお, I の解答に答案用紙 1 枚を, II の解答に答案用紙 1 枚を, それぞれ用いること.

- I. 以下の 4 つの過程から構成されるガスタービンサイクルについて考える. ただし, 作動ガスは定圧比熱  $c_p$  (一定) の理想気体とし, 比熱比, 圧力比, および最高温度比をそれぞれ  $\kappa$ ,  $\phi$ ,  $\tau$  とする. また, 温度, 圧力, 比エントロピー, 比体積, および気体定数をそれぞれ  $T$ ,  $p$ ,  $s$ ,  $v$ ,  $R$  とし, 状態 1 ~ 4 における温度を  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) と表すものとする.

状態 1 → 状態 2: 断熱圧縮過程  
状態 2 → 状態 3: 等圧加熱過程  
状態 3 → 状態 4: 断熱膨張過程  
状態 4 → 状態 1: 等圧冷却過程

以下の設問に答えよ.

- (1) このサイクルの  $T$ - $s$  線図, および  $p$ - $v$  線図を示せ. ただし, それぞれの図に各状態番号を付すこと.
- (2) 状態 1 から状態 2 の過程で圧縮機にする仕事を  $\kappa$ ,  $R$ ,  $T_1$ ,  $\phi$  を用いて表せ. また, 圧力比を一定とし, 状態 1 から等温圧縮することで状態 2\* を得た. このとき, 圧縮機にする仕事を  $R$ ,  $T_1$ ,  $\phi$  を用いて表せ. さらに, これら 2 つの仕事を比較し, どちらが大きいのか, 説明せよ.
- (3) 状態 2 から状態 3 にかけての単位質量あたりのエントロピー変化量を  $\kappa$ ,  $R$ ,  $\phi$ ,  $\tau$  を用いて表せ.
- (4) 理論熱効率を  $\kappa$ ,  $\phi$  のみを用いて表せ.

次に, 図 1-1 に示すように圧縮機と燃焼器の間に熱交換器 (高温排気ガスから熱回収を行うための再生器) を設置した再生ガスタービンサイクルについて考える. 高温ガス, 低温ガスの熱交換器入口温度はそれぞれ  $T_4$ ,  $T_2$  に対応する. ここで, 熱交換器の流路配置は対向流型とし, 熱抵抗の無視できる隔壁を介して熱交換が行われるものとする. また, 高温ガス, 低温ガスの質量流量は  $\dot{m}$  で等しく, 一定と仮定する. このとき, 高温ガス, 低温ガスの熱容量流量は  $C = \dot{m}c_p$

で等しい。高温ガス、低温ガスの熱交換器出口における温度をそれぞれ  $T_4' (< T_4)$ ,  $T_2' (> T_2)$  と表し、熱交換器の温度効率  $\varepsilon$  を次式により定義する。

$$\varepsilon \equiv \frac{T_4 - T_4'}{T_4 - T_2}$$

以下の設問に答えよ。

(5) 熱交換器におけるエントロピー生成量を  $C$ ,  $T_4$ ,  $T_2$ ,  $T_4'$ ,  $T_2'$  を用いて表せ。また、高温ガス、低温ガスの温度分布が図 1-2 に示すように流れに沿う座標方向（高温ガス、低温ガスで逆向き）に互いに平行な直線分布となることに注意し、エントロピー生成量が最大および最小となる温度効率  $\varepsilon$  の値をそれぞれ求めよ。

(6)  $\varepsilon = 1$  のときの理論熱効率を  $\kappa$ ,  $\phi$ ,  $\tau$  のみを用いて表せ。

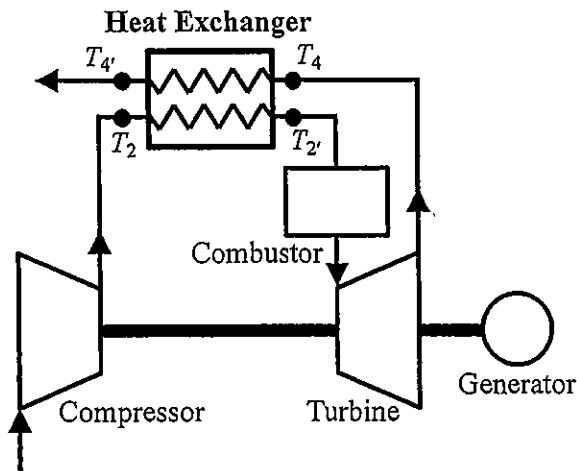


図 1-1

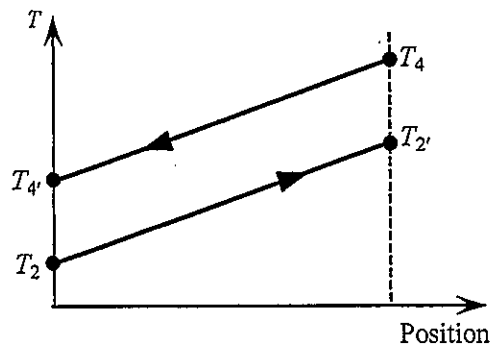


図 1-2

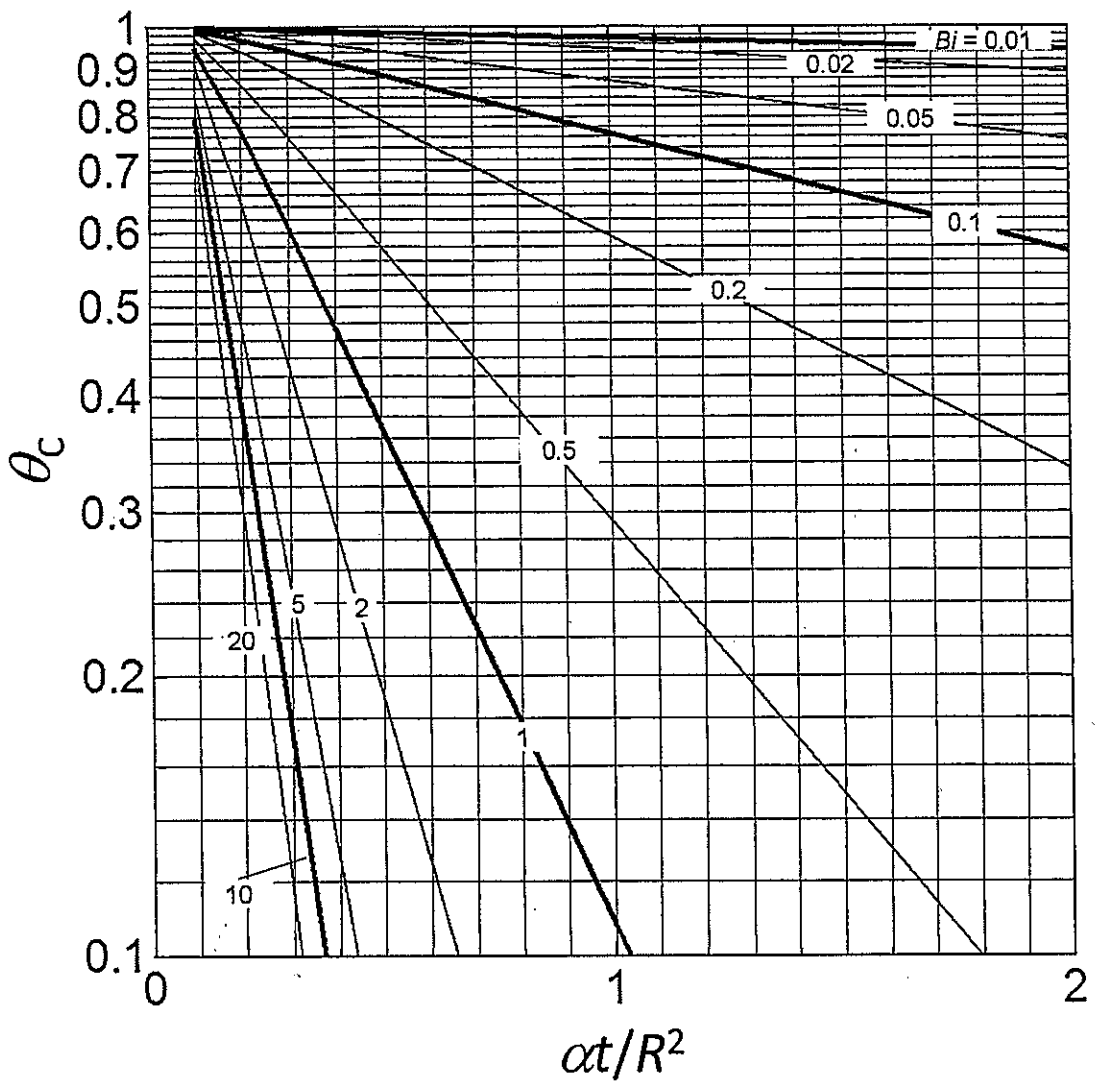
II. ゆで卵をつくる過程を非定常伝熱問題として考える. 相変化やたんぱく質変性は無視し, 卵は半径  $R = 3 \text{ cm}$  の一様な材質の固体球と考える. 温度によらず, 密度  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , 定圧比熱  $c_p = 4 \text{ kJ/kgK}$ , 熱伝導率  $\lambda = 0.6 \text{ W/mK}$  であると仮定する. 時刻  $t = 0$  において, 初期温度  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  の球を沸騰したお湯 (温度  $T_\infty = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ) に入れる. 熱伝達率が  $h = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$  であると仮定して球の温度の時間変化を考える.

まず, 球全体の温度が一様と仮定する集中熱容量法での計算を試みる.

- (1) 球の温度  $T$  が満たすべき方程式と境界条件を記述せよ.
- (2) 設問(1)の方程式を解いて球の温度  $T$  の時間変化を記述せよ.
- (3) 設問(2)の温度変化の概要をグラフに表し, 球の温度が  $50 \text{ }^\circ\text{C}$  となるおおよその時間をグラフから読み取れ.

次に, 球内部の温度分布を考慮する. 初期温度は  $T_0$  で一様な半径  $R$  の球がお湯の中で加熱される一次元非定常熱伝導問題として考える.

- (4) 極座標 (球座標) での一次元非定常熱伝導方程式と境界条件を記述せよ.
- (5) 設問(4)の方程式と境界条件を無次元化し, 現れる無次元数について簡潔に説明せよ.
- (6) 球の場合のハイスラー線図 (図 1-3) を用いて, 球の中心温度  $T_c$  が  $50 \text{ }^\circ\text{C}$  となるおおよその時間を求めよ. ただし,  $\theta_c = \frac{T_c - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$  は無次元の中心温度,  $\alpha$  は温度伝導率 (温度拡散率),  $Bi$  はビオ数である.
- (7) 設問(3)と設問(6)で求めた結果が大きく異なる理由を説明せよ.



☒ 1-3

問題 2

下記の I, II の両方について解答せよ。なお, I の解答に答案用紙 1 枚を, II の解答に答案用紙 1 枚を, それぞれ用いること。

- I. 一様流中の球に働く力について考える。以下の文章の ( ) の中に当てはまる数式を  $\nabla$  (ナブラ記号) 等を用いて答えよ。( ) に入る式のみを答えるのではなく, 式変形などを伴う場合は, 途中の導出過程も示すこと。なお, 流れは定常状態にあるとし, 重力については考えなくてよい。

まず, 粘性のない流体について考える。流れ場の速度ベクトルを  $\vec{u}$  とすると, 非圧縮性流体では, 質量保存を表す連続の式は, ( ① ) と与えられる。また,  $\vec{u}$  を用いて渦度は ( ② ) で与えられる。渦度のない流れは, ポテンシャル流れと呼ばれ, このとき速度場は, スカラーポテンシャル  $\phi$  を用いて ( ③ ) と表される。したがって, ポテンシャル流れに非圧縮の条件を課すと, ( ④ ) が得られる。

流速  $U$  の一様流中に存在する直径  $d$  の球を考える。流体の密度を  $\rho$  とする。流れを非圧縮非粘性のポテンシャル流れとする。このとき, 球表面の速度分布は, 流れの方向に軸を持つ  $(r, \theta, \phi)$  の球座標系で表すと,  $u_\theta = -\frac{3}{2}U \sin\theta$  と与えられる。この速度分布を用いると, 球表面の圧力分布は, 無限遠の圧力を  $p_\infty$  として ( ⑤ ) と与えられる。さらに, この圧力分布を用いて, 球に働く抗力  $D$  を計算すると  $D =$  ( ⑥ ) となる。

次に, 粘性の影響が支配的な場合について考える。粘性流体としてニュートン流体を考える。密度  $\rho$ , 粘度  $\mu$  の非圧縮性ニュートン流体の運動方程式は, 速度場を  $\vec{u}$ , 圧力を  $p$  として, 定常状態を仮定すると ( ⑦ ) で与えられる。代表長さを  $d$ , 代表速度を  $U$  として, 方程式の無次元化を考える。粘性で支配された系での無次元化方程式を考えるため, 圧力の無次元化を

$$p^* = \frac{p}{\mu \frac{U}{d}} \quad (*は, 無次元量であることを表す)$$

とする。このとき, 無次元速度  $\vec{u}^*$ , 無次元圧力  $p^*$ , 無次元長さによる空間微分  $\nabla^*$

およびレイノルズ数  $Re =$  ( ⑧ ) を用いて, 式⑦は ( ⑨ ) と表される。粘性のみに支配される流れにおいては, レイノルズ数が 0 となる極限を考えると式⑨は ( ⑩ ) となる。この式で記述される流れをストークス流れと呼ぶ。

ストークス流れに関して, 流速  $U$  の一様流中に存在する直径  $d$  の球に働く力



を考える。連続の式と運動量保存式を連立して、一様流中の球の周りの速度分布を求めると、

$$u_r = \left( 1 - \frac{3d}{4r} + \frac{d^3}{16r^3} \right) U \cos \theta \quad , \quad (A)$$

$$u_\theta = - \left( 1 - \frac{3d}{8r} - \frac{d^3}{32r^3} \right) U \sin \theta \quad (B)$$

となる。また、圧力分布は、無限遠の圧力を  $p_\infty$  として、

$$p = p_\infty - \frac{3d^2}{4r^2} \frac{\mu U}{d} \cos \theta$$

となる。これらの式を用いて、球に働く抗力を求めることを考える。非粘性流体の場合とは異なり、この場合には、球の抗力には圧力分布による寄与  $D_p$  と粘性応力による寄与  $D_\mu$  がある。圧力分布より  $D_p$  を計算すると、 $D_p = ( \text{⑪} )$  となる。次に  $D_\mu$  を計算するためには、球の表面に働く粘性応力を計算する必要がある。球の表面に働く粘性応力には、球表面に垂直な方向の成分  $\tau_{rr}$  と球表面に接する方向の成分  $\tau_{r\theta}$ 、 $\tau_{r\phi}$  がある。式(A)、(B)を用いて、 $\tau_{rr}$ 、 $\tau_{r\theta}$  を計算すると、 $\tau_{rr} = ( \text{⑫} )$ 、 $\tau_{r\theta} = ( \text{⑬} )$  となる。また、流れの軸対称性より  $\tau_{r\phi} = 0$  となる。これらを用いて粘性応力を球の表面で積分し、抗力方向の成分を求めると、 $D_\mu = ( \text{⑭} )$  となる。以上を用いて、 $D_p$  と  $D_\mu$  を足し合わせたものが抗力  $D$  となる。この抗力を無次元化した抗力係数  $C_D$  は

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 \pi \frac{d^2}{4}}$$

で与えられ、式⑧で与えられたレイノルズ数  $Re$  を用いると、 $C_D = ( \text{⑮} )$  となる。

II. 図 2-1 に示すような遠心ポンプを考える. 遠心ポンプには, ノズルを通過して密度  $\rho$  の水が流入している. ノズルにおいて, 断面①と断面②にはマンノメータが取り付けられており, 密度  $\rho_h$  を持つ水銀が入れられている. ノズルの断面積, 速度, 圧力を  $A, u, P$  とし, 断面①, ②における物理量については, 添え字 1, 2 により示す. ここで,  $A_1 > A_2$  とする. また, 重力加速度は  $g$  とする. 次に, ノズルより流出した水は, 軸に沿って取り付けられた遠心ポンプ羽根車 (インペラ) に流入する. 羽根車のブレード内半径は  $r$ , 外半径は  $R$  であり, ブレードの高さは  $h$  である. 羽根車は点  $O$  を中心にトルク  $T$  で回転していて, 流量によらずトルク一定で動作させることを考える. なお, 遠心ポンプに流入する際の旋回成分は十分に小さいとする. また, 遠心ポンプ部での重力の影響は無視できる. 以下の設問に答えよ.

- (1) 水が流れている時に, マノメータの液面は, 断面①と断面②のどちらが高くなるか答えよ.
- (2) 断面①と②の液面の高さの差を  $\Delta H$  としたときの流量  $Q$  を求めよ.
- (3) 流量  $Q$  を用いて羽根車の角速度  $\omega$  を求めよ.
- (4) 断面①と②の液面の高さの差が  $2\Delta H$  に変化した時, 羽根車の角速度は設問(3)で求めた角速度に対して何倍になるか求めよ.

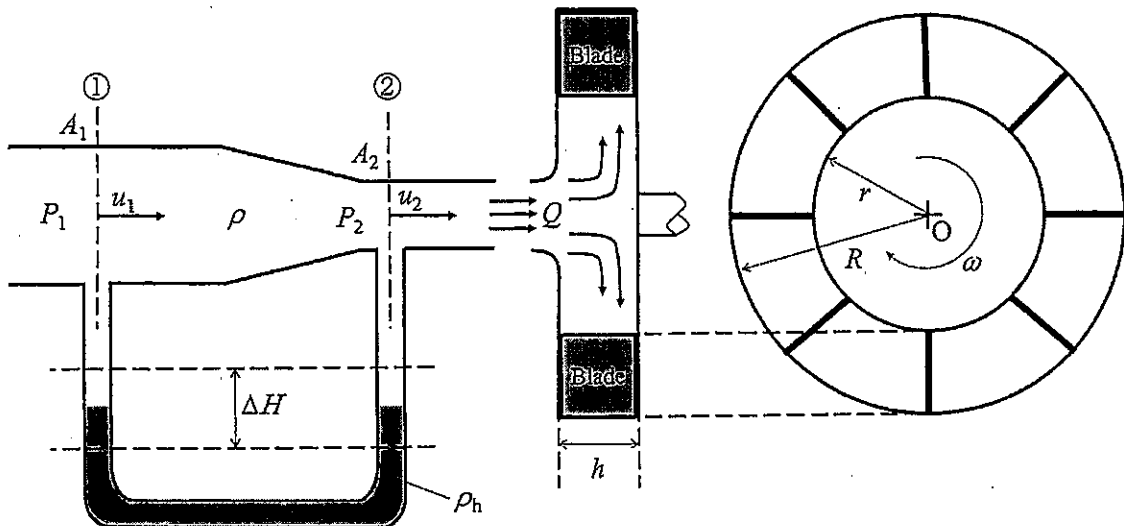


図 2-1

次に、図 2-2 のようにブレードの先端角度が  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ) となるようにした。羽根車は一定のトルク  $T$  で時計回りに回転しているとする。

(5) 羽根車を駆動するために必要な動力  $P_w$  を求めよ。

(6) ある流量のもとで設問(5)において求めた動力  $P_w$  は最小となる。このときのマンメータにおける断面①と②の液面の高さの差を求めよ。

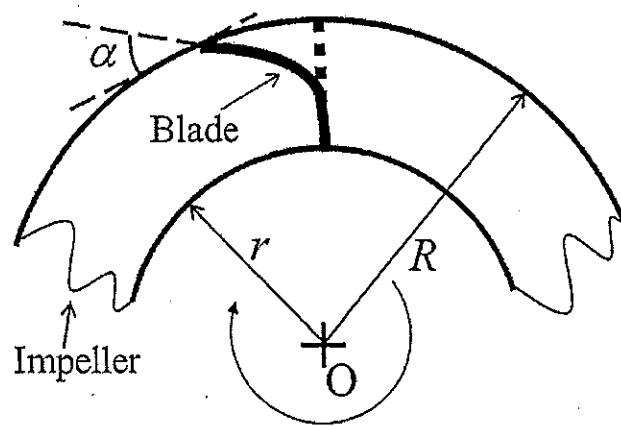


図 2-2

## Problem 1

Answer both of the following Questions I and II. Use one answer sheet for Question I and use another sheet for Question II.

I. Consider a gas-turbine cycle consisting of the following four processes:

Process 1 (State 1  $\rightarrow$  State 2): Isentropic compression,

Process 2 (State 2  $\rightarrow$  State 3): Isobaric heating,

Process 3 (State 3  $\rightarrow$  State 4): Isentropic expansion,

Process 4 (State 4  $\rightarrow$  State 1): Isobaric cooling.

The working fluid is assumed as an ideal gas with a specific heat at constant pressure,  $c_p$  (constant). The specific heat ratio, the pressure ratio, and the maximum temperature ratio are represented by  $\kappa$ ,  $\phi$ , and  $\tau$ , respectively. Also, the temperature, the pressure, the specific entropy, the specific volume, and the gas constant are represented by  $T$ ,  $p$ ,  $s$ ,  $v$ , and  $R$ , respectively. The temperatures for States 1 - 4 are respectively denoted as  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Answer the following questions.

- (1) Illustrate the  $T$ - $s$  and  $p$ - $v$  diagrams of this cycle. Indicate each State number in the illustrations.
- (2) Derive the amount of work done by the compressor in Process 1 (State 1  $\rightarrow$  State 2). Express the answer with  $\kappa$ ,  $R$ ,  $T_1$ , and  $\phi$ . Also, under the same pressure ratio, consider an isothermal process from State 1. After this process, State 2\* is obtained. Derive the amount of work done by the compressor during this process (State 1  $\rightarrow$  State 2\*). Express the answer with  $R$ ,  $T_1$ , and  $\phi$ . Then, compare the amounts of work in these two processes and explain which is larger.
- (3) Derive the amount of the entropy change per unit mass in Process 2 (State 2  $\rightarrow$  State 3). Express the answer with  $\kappa$ ,  $R$ ,  $\phi$ , and  $\tau$ .
- (4) Derive the theoretical thermal efficiency of this cycle. Express the answer using only  $\kappa$  and  $\phi$ .

Next, consider a regenerative gas-turbine cycle as shown in Figure 1-1. For energy recovery from the hot exhaust gas, a heat exchanger (recuperator) is additionally

equipped in between the compressor and the combustor. Here the inlet temperatures of the hot and cold gases correspond to  $T_4$  and  $T_2$ , respectively. The counter-flow arrangement is assumed for the heat-exchanger passages, and the heat is exchanged through separating walls with negligible heat resistance. The mass flow rates of the hot and cold gases are assumed to be identical and constant at  $\dot{m}$ . Thus the heat capacity rate  $C$  for the hot and cold gases is the same as  $C = \dot{m}c_p$ . The outlet temperatures of the hot and cold gases are denoted by  $T_4'$  ( $< T_4$ ) and  $T_2'$  ( $> T_2$ ), respectively. The temperature efficiency of this heat exchanger,  $\varepsilon$ , is defined as:

$$\varepsilon \equiv \frac{T_4 - T_4'}{T_4 - T_2}$$

Answer the following questions.

- (5) Derive the amount of the entropy generation in the heat-exchange process. Express the answer with  $C$ ,  $T_4$ ,  $T_2$ ,  $T_4'$ , and  $T_2'$ . Also, obtain the temperature efficiency  $\varepsilon$  for the maximum and minimum entropy generation, respectively. Note that, as shown in Figure 1-2, the temperature distributions for the hot and cold gases follow the straight-line profiles that are parallel to each other in the coordinate along the flow (opposite direction for the hot and cold gases).
- (6) Derive the theoretical thermal efficiency of this regenerative cycle when  $\varepsilon = 1$ . Express the answer using only  $\kappa$ ,  $\phi$ , and  $\tau$ .

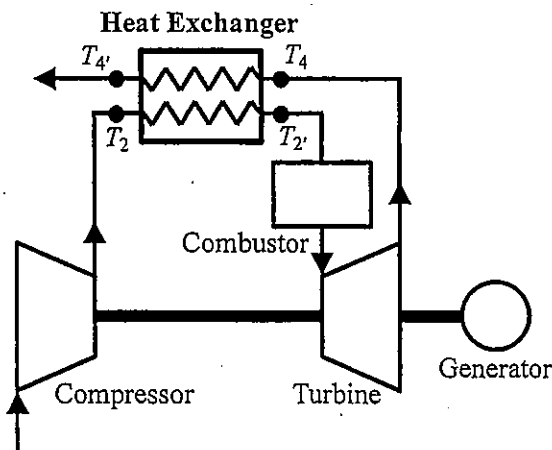


Figure 1-1

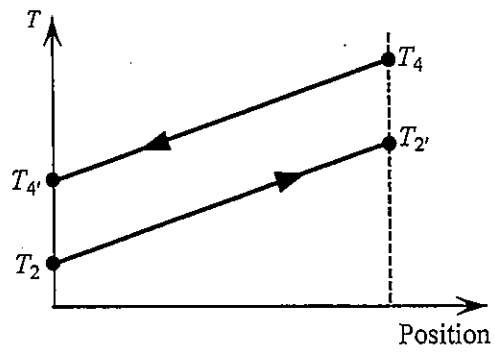


Figure 1-2

II. Consider a process of 'boiling an egg' as an unsteady heat conduction problem. Ignoring the phase change and the protein thermal denaturation processes, we assume that an egg is a solid sphere of uniform material with radius  $R = 3$  cm. We assume that density  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, specific heat at constant pressure  $c_p = 4$  kJ/kgK, and thermal conductivity  $\lambda = 0.6$  W/mK are constant irrespective of temperature. At time  $t = 0$ , a sphere with an initial temperature  $T_0 = 20$  °C submerges to boiling water (temperature  $T_\infty = 100$  °C). Consider the temperature change of the sphere assuming the heat transfer coefficient  $h = 200$  W/m<sup>2</sup>K.

First, consider the lumped capacitance model, i.e., assuming that temperature of the whole sphere is uniform.

- (1) Describe the differential equation and boundary conditions for the temperature  $T$  of the sphere.
- (2) Obtain the temporal change of temperature of the sphere by solving the equation in Question (1).
- (3) Draw a schematic graph of the temperature change in Question (2). By reading from the graph, estimate the approximate time when the temperature of the sphere becomes 50 °C.

Next, consider the temperature distribution inside the sphere. This is a one-dimensional unsteady heat conduction problem of a sphere of radius  $R$  with the initial uniform temperature  $T_0$  heated in the boiling water.

- (4) Describe the one-dimensional unsteady heat conduction equation in spherical coordinates and boundary conditions.
- (5) Obtain the non-dimensional form of the equation and boundary conditions in Question (4). Concisely explain the defined non-dimensional numbers.
- (6) By using the Heisler diagram for a sphere in Figure 1-3, obtain the approximate time when the center temperature  $T_C$  of the sphere becomes 50 °C.

Here,  $\theta_c = \frac{T_c - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$  is the non-dimensional center temperature,  $\alpha$  is thermal diffusivity, and  $Bi$  is Biot number.

(7) Explain the reason of the large discrepancy in results of Question (3) and Question (6).

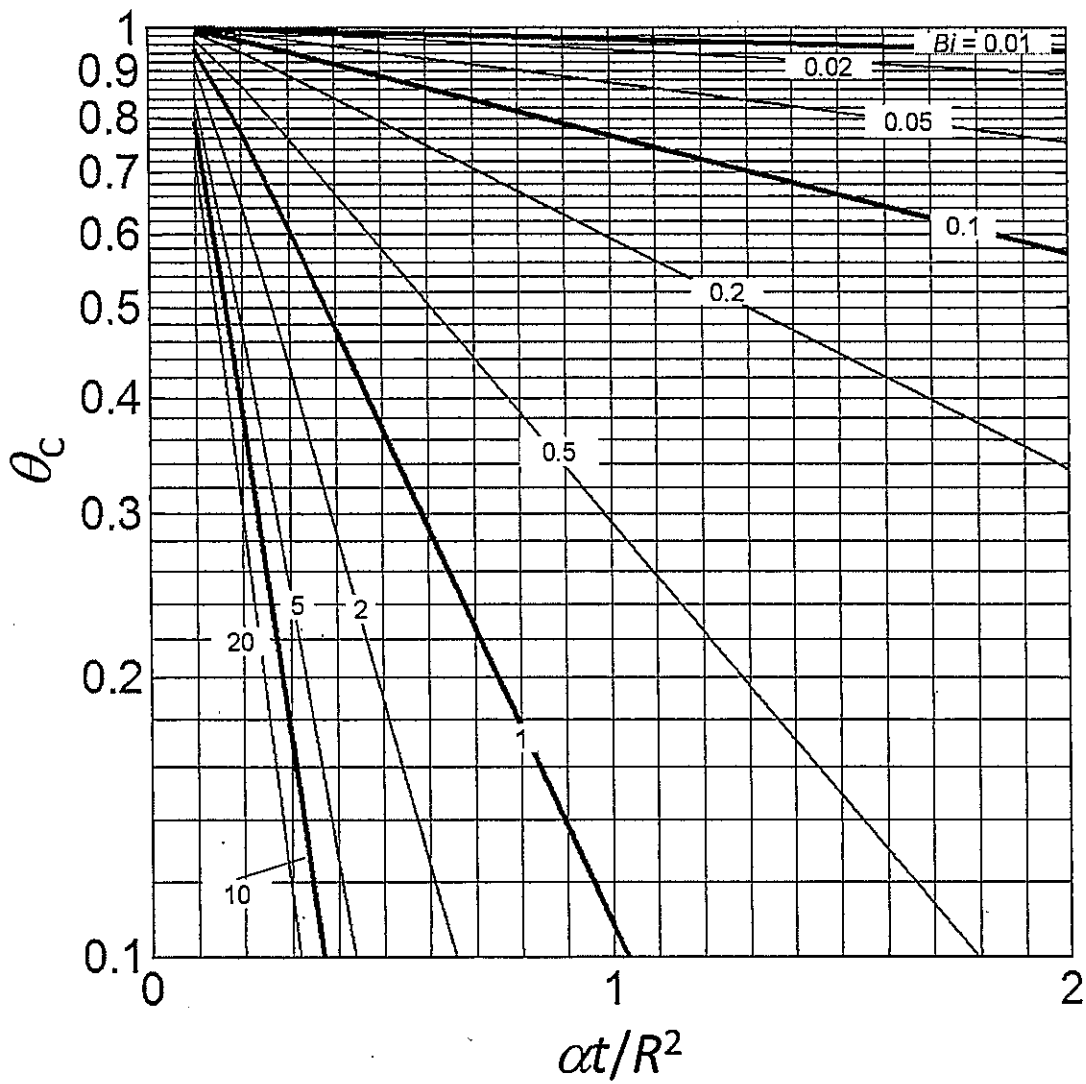


Figure 1-3



## Problem 2

Answer both of the following Questions I and II. Use one answer sheet for Question I and use another sheet for Question II.

I. Consider the force acting on a sphere in a uniform flow. Answer mathematical expressions which are suitable in ( ) in the following text, using the  $\nabla$  (Nabla symbol), etc. Not only the answers, but also the derivations of the solutions need to be shown, if there are the manipulations of mathematical expressions. And, assume that the flow is in the steady state and the effect of gravity can be neglected.

First, consider the fluid without viscosity. Let  $\vec{u}$  be the velocity vector of the flow field. For an incompressible flow, the equation of continuity which represents conservation of mass is expressed as ( ① ). The vorticity is expressed as ( ② ) using  $\vec{u}$ . A flow without vorticity is called potential flow. Using a scalar potential  $\phi$ , the velocity field is expressed as ( ③ ). Hence, the potential flow under an incompressible condition yields ( ④ ).

Consider a sphere of diameter  $d$  in the uniform flow with the fluid velocity of  $U$ . The fluid density is  $\rho$ . The flow is assumed to be an incompressible and inviscid potential flow. Then, using the spherical coordinate  $(r, \theta, \phi)$  with its axis in the flow direction, the velocity distribution along the sphere surface is given as  $u_\theta = -\frac{3}{2}U \sin\theta$ . Using this velocity distribution and denoting the pressure at infinity as  $p_\infty$ , the pressure distribution on the sphere surface is given as ( ⑤ ). Using this pressure distribution, the drag force  $D$  acting on the sphere is given as  $D =$  ( ⑥ ).

Next, consider the case that viscosity is dominant. Consider the Newtonian fluid as a viscous fluid. Denoting the velocity field as  $\vec{u}$  and the pressure as  $p$  and assuming the steady state, the equation of motion for the Newtonian fluid with the density of  $\rho$  and the viscosity of  $\mu$  is given as ( ⑦ ). Consider the nondimensionalization of the equation using the characteristic length  $d$  and the characteristic velocity  $U$ . Since we consider the dimensionless equation dominated by the viscosity, the pressure is nondimensionalized as

$$p^* = \frac{p}{\mu \frac{U}{d}} \quad (* \text{ represents the dimensionless quantity})$$

Using the dimensionless velocity  $\bar{u}^*$ , the dimensionless pressure  $p^*$ , the spatial derivative  $\nabla^*$  differentiated by dimensionless length, and Reynolds number  $Re = \left( \textcircled{8} \right)$ , Eq.  $\textcircled{7}$  is expressed as  $\left( \textcircled{9} \right)$ . For a flow dominated only by the viscosity, taking the limit of Reynolds number being 0, Eq.  $\textcircled{9}$  becomes  $\left( \textcircled{10} \right)$ . The flow described by this equation is called Stokes flow.

Related to Stokes flows, consider the force acting on a sphere of diameter  $d$  in a uniform flow of velocity  $U$ . Solving a set of the continuity and the momentum conservation equations, the velocity distributions around a sphere in a uniform flow are obtained as

$$u_r = \left( 1 - \frac{3d}{4r} + \frac{d^3}{16r^3} \right) U \cos \theta \quad , \quad (\text{A})$$

$$u_\theta = - \left( 1 - \frac{3d}{8r} - \frac{d^3}{32r^3} \right) U \sin \theta \quad (\text{B})$$

And, denoting the pressure at infinity as  $p_\infty$ , the pressure distribution is given as

$$p = p_\infty - \frac{3d^2}{4r^2} \frac{\mu U}{d} \cos \theta$$

Using these expressions, consider obtaining the drag force acting on the sphere. Unlike the case of an inviscid flow, there are two contributions to the drag force, i.e., one from the pressure distribution  $D_p$  and the other from the viscous stress distribution  $D_\mu$ . From the pressure distribution, we obtain  $D_p = \left( \textcircled{11} \right)$ . Next, to calculate  $D_\mu$ , we need to calculate the viscous stress acting on a sphere surface. The viscous stress has the components of  $\tau_{rr}$  which is the component normal to the sphere surface, and  $\tau_{r\theta}$  and  $\tau_{r\phi}$  which are components tangential to the surface. Using (A) and (B),  $\tau_{rr}$  and  $\tau_{r\theta}$  are obtained as  $\tau_{rr} = \left( \textcircled{12} \right)$ ,  $\tau_{r\theta} = \left( \textcircled{13} \right)$ . Since the flow field is axisymmetric,  $\tau_{r\phi} = 0$ . Using these expressions and integrating the viscous stress over the sphere surface, the drag force component is obtained as  $D_\mu = \left( \textcircled{14} \right)$ . Then, we can obtain the drag force by adding the  $D_p$  and  $D_\mu$ . The drag coefficient  $C_D$  is given by the nondimensionalization of drag

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 \pi \frac{d^2}{4}}$$

Using the Reynolds number given by  $Re = \textcircled{8}$  ,  $C_D = ( \textcircled{15} )$  is obtained.

II. Consider a centrifugal pump as illustrated in Figure 2-1. Water with the density  $\rho$  flows into the centrifugal pump through the nozzle. A manometer is connected to the nozzle at the cross sections ① and ②, and mercury with the density  $\rho_h$  is used for the manometer. The area, the velocity, and the pressure at the cross sections ① and ② are denoted by  $A$ ,  $u$  and  $P$ , respectively, and the subscripts 1 and 2 denote the variables at the cross sections ① and ②, respectively. Here we assume  $A_1 > A_2$ . In addition, gravitational acceleration is denoted by  $g$ . Then, water from the nozzle flows into the impeller attached to the rotating shaft in the centrifugal pump. The inner and outer radii of the blades of the impeller are  $r$  and  $R$ , respectively, and their height is  $h$ . The impeller is rotating around the point  $O$  with the torque  $T$ , and it is assumed that it rotates at the constant torque regardless of the flow rate. A swirling component of the inflow to the centrifugal pump is negligible, and the effect of gravity in the centrifugal pump is negligible. Answer the following questions.

- (1) When water is flowing, answer which liquid level of the manometer at the cross section ① or ② becomes higher.
- (2) Obtain the flow rate  $Q$  when the height difference in liquid levels between the cross sections ① and ② becomes  $\Delta H$ .
- (3) Obtain the angular velocity of the impeller  $\omega$  using the flow rate  $Q$ .
- (4) Calculate how many times larger the angular velocity of the impeller becomes comparing to the angular velocity obtained in Question (3) when the height difference in liquid levels between the cross sections ① and ② changes to  $2\Delta H$ .

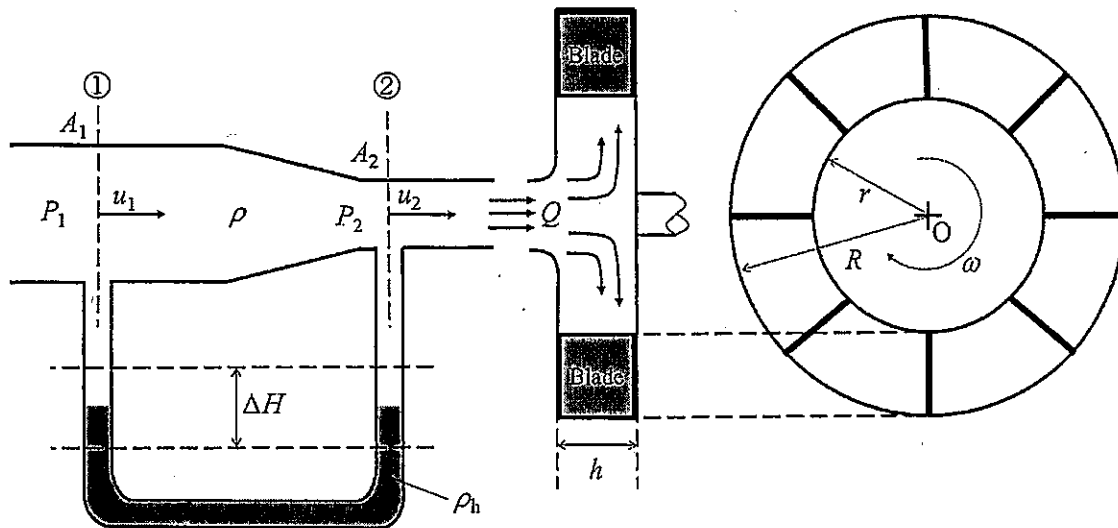


Figure 2-1

Then, the angle of the blade tip is set to be  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ) as illustrated in Figure 2-2. The impeller is rotating in the clockwise direction at the constant torque  $T$ .

- (5) Obtain the power  $P_w$  to rotate the impeller.
- (6) The power  $P_w$  obtained in Question (5) becomes minimum at a certain flow rate. Obtain the height difference in liquid levels of the manometer between the cross sections ① and ② at the minimum  $P_w$ .

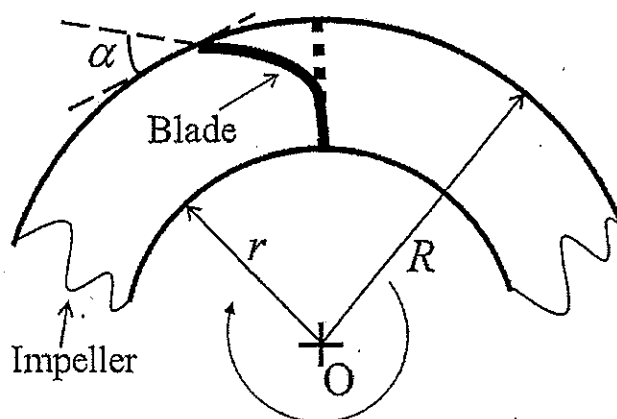


Figure 2-2